Μάνος Μαυρογιάννης

# $10^{ο}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟ – ΘΕΩΡΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3
# (ΟΡΙΣΜΟΙ – ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ)

Έννοιες όπως σημείο , ευθεία και επίπεδο τις δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις . Οι έννοιες αυτές υπόκεινται σε κάποιους ισχυρισμούς που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη τους και ονομάζονται **αξιώματα** .
Τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται , επιλέγονται . Μετά από μια νέα έννοια κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα** , ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα** .

## ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ : ΠΛΕΥΡΕΣ—ΓΩΝΙΕΣ

Είδη τριγώνου ως προς τις πλευρές του :
**Σκαληνό** λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του άνισες .
**Ισοσκελές** λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές του ίσες .
**Ισόπλευρο** λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες .

- **Περίμετρος** τριγώνου με πλευρές $\alpha , \beta , \gamma$ ονομάζεται το άθροισμα των πλευρών του και συμβολίζεται με $2\tau$ , άρα $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$ . (Ημιπερίμετρος τριγώνου $\tau = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$)

Είδη τριγώνου ως προς τις γωνίες του :
**Οξυγώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις γωνίες του οξείες .
**Ορθογώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει μία γωνία ορθή .
**Αμβλυγώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει μία γωνία .

## ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ : ΔΙΑΜΕΣΟΙ — ΔΙΧΟΤΟΜΟΙ — ΥΨΗ

**Διάμεσος** $\left(\mu_\alpha ,\ \mu_\beta\ ,\mu_\gamma\right)$ ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς . Οι διάμεσοι ενός τριγώνου συντρέχουν στο **βαρύκεντρο** του τριγώνου .
**Διχοτόμος** $\left(\delta_\alpha , \delta_\beta\ , \delta_\gamma\right)$ μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας , από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά . Οι διχοτόμοι ενός τριγώνου συντρέχουν στο **έγκεντρο** του τριγώνου .
**Ύψος** $\left(\upsilon_\alpha , \upsilon_\beta\ , \upsilon_\gamma\right)$ ενός τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα , που φέρεται από μία κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς . Τα ύψη ενός τριγώνου συντρέχουν στο **ορθόκεντρο** του τριγώνου . (Το ορθόκεντρο ενός αμβλυγώνιου τριγώνου βρίσκεται εκτός του τριγώνου.)

**Θεώρημα (Π-Γ-Π)** : Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες , τότε είναι ίσα .
**Πόρισμα** : Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο :

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες .
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος .

**Πόρισμα** : Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες .
**Πόρισμα** : Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του .
**Πόρισμα** : Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα , τότε και οι χορδές τους είναι ίσες .

**Θεώρημα (Γ-Π-Γ) :** Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα .
**Θεώρημα (Π-Π-Π) :** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα .

**Πρόταση :** Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα .
(Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται <u>αντίστοιχες</u> ή <u>ομόλογες</u>) .
**Πόρισμα :** Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου , που αντιστοιχεί στη βάση του , είναι διχοτόμος και ύψος .
**Πόρισμα :** Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του .
**Πόρισμα :** Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου , μικρότερων του ημικυκλίου , είναι ίσες , τότε και τα τόξα είναι ίσα .
**Πόρισμα :** Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες , τότε και τα τόξα είναι ίσα .
**Θεώρημα :** Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία αυτή .
**Θεώρημα :** Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία , τότε είναι ίσα .
**Θεώρημα :** Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία , τότε είναι ίσα .
**Πρόταση :** Δύο ορθογώνια τρίγωνα , που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία , είναι ίσα .
**Πρόταση :** Δύο ορθογώνια τρίγωνα , που έχουν μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία , είναι ίσα .
**Πόρισμα :** Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής .
**Πόρισμα :** Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μία χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της .
**Θεώρημα :** Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα .
**Θεώρημα** : Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της , και αντίστροφα , κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου .

<u>Γνωστοί γεωμετρικοί τόποι :</u>

- ο κύκλος είναι ένας γεωμετρικός τόπος , αφού όλα τα σημεία του **και μόνον αυτά** έχουν την ιδιότητα να απέχουν μία ορισμένη απόσταση (ακτίνα) από ένα σταθερό σημείο (κέντρο) .
- η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ένας γεωμετρικός τόπος , αφού όλα τα σημεία της **και μόνον αυτά** έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος .
- η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ένας γεωμετρικός τόπος , αφού όλα τα σημεία της **και μόνον αυτά** (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από της πλευρές της γωνίας .

<u>Είδη συμμετρίας :</u>

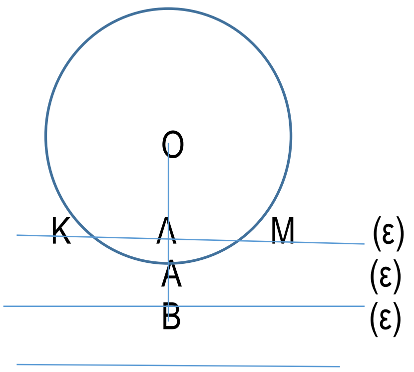
- Δύο σχήματα Σ , Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο , αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο , το οποίο ονομάζεται **κέντρο συμμετρίας** .

- Δύο σχήματα Σ , Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία (ε) , αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την (ε) , η οποία ονομάζεται **άξονας συμμετρίας** .

**Ορισμός :** <u>Εξωτερική γωνία</u> ενός τριγώνου ονομάζεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του .
**Θεώρημα :** Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι (εσωτερικές) γωνίες του τριγώνου .
**Πόρισμα :** Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή ή αμβλεία γωνία .
**Πόρισμα :** Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των $180^0$ .
**Θεώρημα :** Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες και αντίστροφα .
**Πόρισμα :** Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία , τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου .
**Πόρισμα :** Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες , τότε είναι ισοσκελές .
**Πόρισμα :** Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες , τότε είναι ισόπλευρο .
**Θεώρημα (Τριγωνική ανισότητα) :** Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους .
Δηλαδή , αν $\alpha , \beta , \gamma$ είναι οι πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου , όπου $\beta \geq \gamma$ , τότε πάντοτε θα ισχύει : $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ (Το ίδιο θα ισχύει και για κάθε πλευρά του τριγώνου) .
**Πρόταση (Εφαρμογή βιβλίου) :** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες , τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι ομοίως άνισες και αντίστροφα .
**Ορισμός προβολής — ίχνους :**
Έστω μία ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής . Αν φέρουμε ευθεία $(\delta) \perp (\varepsilon)$ η οποία τέμνει την (ε) στο σημείο Κ και μία πλάγια ευθεία (ζ) , η οποία τέμνει την (ε) στο σημείο Β , τότε το σημείο Κ ονομάζεται προβολή του Α πάνω στην ευθεία (ε) ή ίχνος της καθέτου $(\delta)$ πάνω στην (ε) , ενώ το σημείο Β ονομάζεται ίχνος της ευθείας (ζ) ή του τμήματος ΑΒ πάνω στην ευθεία (ε) .
**Θεώρημα :** Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα , τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου , και αντίστροφα .
**Θεώρημα :** Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα , τότε :

- Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα .
- Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα , τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα .

**Σχετικές θέσεις ευθείας— κύκλου** (Είναι οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε όταν θεωρήσουμε έναν τυχαίο κύκλο (Ο , ρ) και μία ευθεία (ε) στο επίπεδο) :
Θεωρούμε δ την απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από την ευθεία (ε) .



(i) αν δ = ΟΛ < ρ (ΟΛ = απόστημα κύκλου), τότε ο κύκλος και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία Κ , Λ με τον κύκλο και ονομάζεται **τέμνουσα** του κύκλου .
(ii) αν δ = ΟΑ =ρ , τότε ο κύκλος και η ευθεία έχουν ένα (διπλό) κοινό σημείο Α , που ονομάζεται σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο και η ευθεία (ε) ονομάζεται **εφαπτομένη** του κύκλου στο σημείο Α .
(iii) αν δ = ΟΒ > ρ , τότε η ευθεία (ε) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και ονομάζεται **εξωτερική** του κύκλου .
**Πρόταση :** Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη .
**Πρόταση :** Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική .
**Θεώρημα :** Μία ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία .
**Θεώρημα :** Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου , που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους .
**Πόρισμα :** Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου , τότε η διακεντρική ευθεία του :
- είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής .
- διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής .

**Σχετικές θέσεις δύο κύκλων** (Είναι οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε όταν θεωρήσουμε στο επίπεδο δύο τυχαίους κύκλους (Κ , R) και (Λ , ρ) , όπου $R \geq \rho$ .
**Ορισμός :** Διάκεντρος δ δύο κύκλων ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων .
- Ο κύκλος (Λ , ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Κ , R) , αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$ .
- Οι κύκλοι (Κ , R) και (Λ , ρ) βρίσκονται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου , αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$ .
- Οι κύκλοι (Κ , R) και (Λ , ρ) εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$ .
- Οι κύκλοι (Κ , R) και (Λ , ρ) εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$ .

Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται **σημείο επαφής** και είναι σημείο της διακέντρου .
- Οι κύκλοι (Κ , R) και (Λ , ρ) τέμνονται , δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία , αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$ .

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων .

**Θεώρημα :** Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους .
**Πρόταση :** Όταν οι τεμνόμενοι κύκλοι είναι ίσοι , δηλαδή όταν $R = \rho$ , τότε και η κοινή χορδή τους είναι μεσοκάθετος της διακέντρου .

**Ορισμός :** Η ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους και τους αφήνει προς το ίδιο μέρος λέγεται **κοινή εξωτερική εφαπτομένη** , ενώ η ευθεία που έχει τους δύο κύκλους στους οποίους εφάπτεται εκατέρωθεν αυτής λέγεται **κοινή εσωτερική εφαπτομένη** .
Δύο κύκλοι στο επίπεδο έχουν το πολύ τέσσερις κοινές εφαπτομένες .